

Lec 34 函数极限的 24 种科学定义

34.1 数列 $\{a_n\}$ 极限 4 种科学定义

定义 34.1 (数列极限)

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n > N, |a_n - a| < \varepsilon.$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n > N, a_n > M.$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n > N, a_n < -M.$
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n > N, |a_n| > M.$



例 34.1 $\forall k \in \mathbb{N}^*$, 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} n^k = +\infty.$

证明 $\forall M > 0$, 要使 $n^k > M$, 只需 $n > M^{1/k}$, 取 $N = \max\{M^{1/k}, 1\}$, 则当 $n > N$ 时, $n^k > M$.

34.2 函数极限的 $\varepsilon - \delta$ 定义法

定义 34.2

设 x_0 为常数, 函数在 x_0 处的极限为 a 定义为:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon.$$

若 x 从大于 x_0 的一侧趋近于 x_0 , 则称为 x_0 的右极限, 记为

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon;$$

若 x 从小于 x_0 的一侧趋近于 x_0 , 则称为 x_0 的左极限, 记为

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon.$$



考虑 $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \beta$, β 可以是常数 $A, +\infty, -\infty, \infty$. α 可以是常数 $x_0, x_0^+, x_0^-, +\infty, -\infty$. 一共有 24 种情况. 具体而言, 有以下情况:

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$
2. $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$
3. $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$
4. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0, \forall 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M.$
5. $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0, \forall x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow f(x) > M.$
6. $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0, \forall x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow f(x) > M.$
7. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0, \forall 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < -M.$

8. $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0, \forall x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow f(x) < -M.$
9. $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0, \forall x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow f(x) < -M.$
10. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0, \forall 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| > M.$
11. $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0, \forall x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x)| > M.$
12. $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0, \forall x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow |f(x)| > M.$
13. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists X_0 > 0, \forall x > X_0 \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$
14. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists X_0 > 0, \forall x < -X_0 \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$
15. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists X_0 > 0, \forall |x| > X_0 \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$
16. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists X_0 > 0, \forall x > X_0 \Rightarrow f(x) > M.$
17. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists X_0 > 0, \forall x > X_0 \Rightarrow f(x) < -M.$
18. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists X_0 > 0, \forall |x| > X_0 \Rightarrow |f(x)| > M.$
19. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists X_0 > 0, \forall x < -X_0 \Rightarrow f(x) > M.$
20. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists X_0 > 0, \forall x < -X_0 \Rightarrow f(x) < -M.$
21. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists X_0 > 0, \forall |x| > X_0 \Rightarrow |f(x)| > M.$
22. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists X_0 > 0, \forall |x| > X_0 \Rightarrow f(x) > M.$
23. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists X_0 > 0, \forall |x| > X_0 \Rightarrow f(x) < -M.$
24. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists X_0 > 0, \forall |x| > X_0 \Rightarrow |f(x)| > M.$

注 也有的时候将函数 $f(x)$ 在 x_0 处的左极限记为 $f(x_0 - 0)$, 右极限记为 $f(x_0 + 0)$.

定理 34.1

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = a = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x). (x_0 \text{ 为常数})$$



证明 \Rightarrow : $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon.$ 即对 $\forall 0 < x - x_0 < \delta \Leftrightarrow x_0 < x < x_0 + \delta$ 有 $|f(x) - a| < \varepsilon,$ 即 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = a.$ 同理可证 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = a.$

\Leftarrow : $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0, \forall x, x_0 < x < x_0 + \delta_1 \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon.$ 对上述 $\varepsilon, \exists \delta_2 > 0, \forall x, x_0 - \delta_2 < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon.$ 取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\},$ 则 $\forall x, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon.$ 即 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a.$

定理 34.2

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x).$$



证明 令 $x = \frac{1}{t},$ 则 $x \rightarrow \infty \Leftrightarrow t \rightarrow 0.$ 即 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{t}\right) = a \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{t}\right) = a = \lim_{t \rightarrow 0^-} f\left(\frac{1}{t}\right) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x).$

上述最后一个等式由 $\lim_{t \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{t}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{t \rightarrow 0^-} f\left(\frac{1}{t}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ 给出.

例 34.2 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$

34.3 函数极限的四则运算法则

定理 34.3

设 x_0, a, b, c_1, c_2 为常数, 令 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$, 则:

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} (c_1 f(x) + c_2 g(x)) = c_1 a + c_2 b$;
2. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = a \cdot b$; 特别地, $\lim_{x \rightarrow x_0} f^2(x) = a^2$;
3. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b} (b \neq 0)$.



证明

1. 目的时要证明对于任意的正数 ϵ , 能够找到一个正数 δ , 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, $|(c_1 f(x) + c_2 g(x)) - (c_1 a + c_2 b)| \leq \epsilon$.

由极限的定义, 存在 δ_1, δ_2 , 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta_1$ 时,

$$|f(x) - a| < \frac{\epsilon}{2|c_1|},$$

当 $0 < |x - x_0| < \delta_2$ 时,

$$|g(x) - b| < \frac{\epsilon}{2|c_2|}.$$

取 $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, 则当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 同时有

$$|f(x) - a| < \frac{\epsilon}{2|c_1|}, \quad |g(x) - b| < \frac{\epsilon}{2|c_2|},$$

因此有

$$|c_1 f(x) + c_2 g(x) - (c_1 a + c_2 b)| = |c_1(f(x) - a) + c_2(g(x) - b)| \leq |c_1||f(x) - a| + |c_2||g(x) - b| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

2. 证明类似于第一小题。对于任意的正数 ϵ , 存在 δ_1 和 δ_2 , 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta_1$ 时,

$$|f(x) - a| < \frac{\epsilon}{2|b|},$$

当 $0 < |x - x_0| < \delta_2$ 时,

$$|g(x) - b| < \frac{\epsilon}{2|a|}.$$

取 $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, 则当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 同时有

$$|f(x) - a| < \frac{\epsilon}{2|b|}, \quad |g(x) - b| < \frac{\epsilon}{2|a|},$$

因此有

$$|f(x)g(x) - ab| = |f(x)g(x) - af(x) + af(x) - ab| \leq |f(x)||g(x) - b| + |g(x) - b||f(x) - a|.$$

由于 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 x_0 附近连续, 故当 $x \rightarrow x_0$ 时, $|f(x)|$ 和 $|g(x)|$ 被有界地控制。因此我们有

$$|f(x)g(x) - ab| < \epsilon.$$

3. 因为 $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}$, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b \neq 0$, 我们只需证明数列 $\left\{ \frac{1}{g(x)} \right\}$ 收敛于 $\frac{1}{b}$ 。

假设 $b > 0$, 则

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{b} \right| = \left| \frac{|g(x) - b|}{|g(x)b|} \right|.$$

由于 $g(x)$ 收敛于 b , 一方面对于正数 $b/2 > 0$, 存在 δ_1 , 使得当 $|x - x_0| < \delta_1$ 时,

$$|g(x) - b| < \frac{b}{2},$$

另一方面, 对于任意给定的正数 ϵ , 存在 δ_2 , 使得当 $|x - x_0| < \delta_2$ 时,

$$|g(x) - b| < \frac{b^2\epsilon}{2}.$$

所以, 当 $|x - x_0| < \delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ 时,

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{b} \right| \leq |g(x) - b| \cdot \frac{2}{b^2} \cdot \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

即

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{b}.$$

注 函数极限: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \in R$ 也是有“四性”, 即局部有界性, 唯一性, 保号性, 保序性.

定理 34.4 (函数极限的局部有界性)

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 I , 点 $x_0 \in I$, 则 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有界, 即 $\exists \delta > 0, \exists M > 0, \forall x, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| < M$.



证明 局部有界性的证明: 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 I , 点 $x_0 \in I$, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \epsilon \Leftrightarrow |f(x)| < |a| + \epsilon$. 因此, 函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有界, 但 $f(x)$ 在整个定义域 I 内未必有界.

34.4 3 个重要极限及其证明

命题 34.1

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1;$
2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e;$
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_m} = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0}, & n = m; \\ 0, & n < m; \\ \infty, & n > m. \end{cases}$



证明

1. 首先考虑右极限. 设 $0 < x < \frac{\pi}{2}$, 由于 $\sin x > 0$, 由引理易知

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}, \quad \text{即} \quad \frac{\sin x}{x} < \frac{\cos x}{x} < 1.$$

因此

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x = 2 \left(\sin \frac{x}{2} \right)^2 < 2 \sin \frac{x}{2} < x.$$

所以, 由两边夹的得到

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

当 $x \rightarrow 0$ 时, 令 $y = -x$, 则 $y \rightarrow 0^+$, 所以

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\sin(-y)}{-y} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\sin y}{y} = 1.$$

2. 由于对于任意的 $x > 1$, 有 $[x] \leq x < [x] + 1$, 以及

$$\left(1 + \frac{1}{[x]} \right)^x < \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x < \left(1 + \frac{1}{[x] + 1} \right)^x,$$

因此

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{[x]} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{[x] + 1} \right)^x = e.$$

根据两边夹定理, 有

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e.$$

当 $x \rightarrow \infty$ 时, 令 $y = -x$, 则 $y \rightarrow -\infty$, 利用上面结果, 就有

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = \lim_{y \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{1-y} \right)^{-y} = \lim_{y \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{y-1} \right)^{y-1} = e.$$

这就证明了

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e.$$

3. (a). 当 $m > n$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_m} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a_0 x^{n-m} + a_1 x^{n-m-1} + \cdots + a_n x^{n-m}}{b_0 + b_1 x^{m-n-1} + \cdots + b_m x^{m-n}} = \frac{a_0 \cdot 0 + a_1 \cdot 0 + \cdots + a_n \cdot 0}{b_0 + b_1 \cdot 0 + \cdots + b_m \cdot 0} = \frac{0}{b_0} = 0.$
- (b). 当 $m = n$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_m} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m} = \frac{a_0}{b_0}.$
- (c). 当 $m < n$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_m} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_m} = \infty.$

这三个重要极限可以作为公式任意使用.

作业 ex1.3:1(2)(3),2(2)(4),3(2),5(1)(2),9(3)(4),10(3);CH1:13.